

# Óptica Electromagnética

## Introducción

Requisitos previos: Transformadas de Fourier directas e inversas. En 2D. Espaciales.

La transformada de Fourier se puede entender como la descomposición de una señal en ondas planas.

Podemos definir la COHERENCIA ÓPTICA como la aptitud de una fuente para generar interferencias.

Existe correlación temporal entre  $u(P, t)$  y  $u(P, t + \tau)$  ya que se puede predecir una a partir de la otra.

Definimos el VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN como:

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$$

ya que no podemos medir intensidades instantáneas.

Espectros de señales cuasimonocromáticas y monocromáticas, más ancho y un segmento, respectivamente. La anchura del espectro también depende de la longitud del tren de ondas.

## LASER

El término viene del inglés Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

Consiste en un medio activo con una cavidad con espejos y un bombeador dispuestos de tal forma que las emisiones espontáneas y estimuladas se suman constructivamente para una serie de frecuencias o modos.

Para que el LASER comience a emitir se ha de sobrepasar la potencia umbral, en la cual las ganancias energéticas son iguales a las pérdidas.

La DIRECCIONALIDAD se expresa en función del ensanchamiento del cinto del haz  $d$ ,

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{d}.$$

## Coherencia temporal

Consiste en la capacidad de la luz para interferir con una versión desfasada temporalmente (pero no desplazada espacialmente) de ella misma. A este tipo de división de la luz se le denomina división de amplitud.

## Campo monocromático

Para estudiarla, suponemos un interferómetro de Michelson en el que se propagan sin pérdidas dos ondas escalares monocromáticas desfasadas temporalmente,

$$U_1 = a_1 \cos(\omega t - k s_1) \tag{1}$$

y

$$U_2 = a_2 \cos(\omega t - k s_2), \tag{2}$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  dan cuenta de la diferencia de camino óptico debido a la distinta longitud de los brazos del interferómetro.

Estas ondas interfieren en un punto del interferómetro,

$$U = U_1 + U_2. \quad (3)$$

Asumiremos que el proceso es:

- Estacionario. Implica que sus propiedades estadísticas no dependen del origen de tiempos.
- Ergódico. Implica que la media de un parámetro del sistema a lo largo del tiempo es igual a la media a lo largo de todo el conjunto estadístico de sistemas del estado.

Lo que nosotros detectamos es intensidad,

$$I = \langle U^2 \rangle = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \Gamma_{12}(\tau), \quad (4)$$

donde

$$\Gamma_{12}(\tau) \equiv \langle U_1(t + \tau) U_2^*(t) \rangle \quad (5)$$

se denomina FUNCIÓN DE COHERENCIA MUTUA. A partir de ella definimos el GRADO DE COHERENCIA como

$$\gamma_{12}(\tau) \equiv \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}}. \quad (6)$$

El TIEMPO DE COHERENCIA  $\tau_c$  es el tiempo entre pulsos durante el cual se mantiene la coherencia temporal. Se puede definir en función del grado de coherencia como

$$\tau_c \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{12}(\tau)|^2 d\tau. \quad (7)$$

La LONGITUD DE COHERENCIA se define trivialmente como  $l_c \equiv c\tau_c$ .

Por el TEOREMA DE WIENER-KHINCHIN, la función de coherencia mutua  $\Gamma_{12}(\tau)$  y la densidad espectral mutua  $S_{12}(\nu)$  forman un par de transformadas de Fourier,

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(\nu) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\nu. \quad (8)$$

## Campo policromático

Podemos estudiar una señal policromática en vez de una señal monocromática. En este caso, supondremos que el campo está compuesto de una mezcla de frecuencias de forma que

$$E(\tau) = \int_0^{\infty} E_0(\nu) e^{-2\pi i\nu\tau} d\nu. \quad (9)$$

Al interferir esta señal con una versión suya desfasada temporalmente, se puede detectar la intensidad

$$I(\tau) = 2 \int_0^{\infty} |E_0(\nu)|^2 (1 + \cos 2\pi\nu\tau) d\nu. \quad (10)$$

A  $W(\nu) \equiv |E_0(\nu)|^2$  se le denomina PERFIL ESPECTRAL DE LA FUENTE.

La anterior integral tiene dos términos: el primero corresponde a la luminosidad total de la fuente y el segundo, que denotaremos por  $\Delta I$ , da cuenta de la forma del interferograma. Pasando al plano complejo,

$$W(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta I(\tau) e^{2\pi i \nu \tau} d\tau, \quad (11)$$

es decir, el perfil espectral de la fuente y el interferograma forman un par de transformadas de Fourier.

Según esta expresión, sólo podemos recuperar el perfil espectral  $W(\nu)$  variando  $\tau$  entre cero e infinito, pero experimentalmente esto no es posible, ya que los brazos del interferómetro de Michelson son finitos, lo que determina la resolución en frecuencias, es decir, el intervalo de frecuencias mínimo que seremos capaces de distinguir,

$$\Delta\nu_{\min} = \frac{1}{\tau_{\max}}. \quad (12)$$

Si normalizamos el perfil espectral podemos escribir

$$\hat{W}(\nu) = \frac{W(\nu)}{\int_0^{\infty} W(\nu) d\nu} \text{ si } \nu > 0. \quad (13)$$

A partir del análisis del interferograma producido por una fuente podemos deducir su perfil espectral. Para ello, desplazaremos uno de los espejos del interferómetro de forma continua e iremos registrando digitalmente la intensidad recibida como función del tiempo. Realizando la transformada de Fourier numérica, normalmente con técnicas de transformación rápida, del interferograma, obtendremos el perfil espectral de la fuente.

Como ejemplos sencillos de perfiles espectrales podemos ver el los perfiles gaussiano, lorentziano, rectangular o de Voigt. Para este último hay que tener en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier respecto a la correlación.

## Coherencia espacial

Consiste en la capacidad de la luz para interferir con una versión desplazada espacialmente (pero no desfasada temporalmente) de ella misma. A este tipo de división de la luz se le denomina división de frente de ondas.

Este tipo de coherencia está ligada a las dimensiones finitas de toda fuente de luz, ya que las fuentes puntuales no existen.

En esta ocasión consideramos un interferómetro de Young con dos señales analíticas,  $u(P_1, t)$  y  $u(P_2, t)$  donde  $P_1$  y  $P_2$  son dos puntos distintos de la fuente. Si estos dos puntos coincidiesen, la correlación entre ambas señales sería perfecta pero, a medida que se separan, la correlación entre ellas disminuye.

Al igual que en el caso de la coherencia temporal, ambas señales se propagan por el medio siguiendo distintos caminos, y por lo tanto desfasándose la una respecto a la otra, de forma que en un punto  $Q$  de la pantalla ambas se suman dando lugar a la onda

$$\psi(Q) = \hat{K}_1 \psi_1(P_1, t - \frac{r_1}{c}) + \hat{K}_2 \psi_2(P_2, t - \frac{r_2}{c}), \quad (14)$$

donde  $\hat{K}_1$  y  $\hat{K}_2$  son factores complejos asociados a la propagación libre de cada onda en aproximación paraxial, y  $r_1$  y  $r_2$  dan cuenta del desfase entre ambas por la diferencia de caminos ópticos.

En aproximación de Sommerfield–Rayleigh, con una fuente extensa de controno  $\Sigma$  donde la onda toma el valor  $\psi_0(x_0, y_0)$ , podemos suponer que, a la salida de una rendija en  $P_i = (x_i, y_i)$ , a una distancia horizontal  $z_i$  de la fuente cada onda toma la forma

$$\psi_i(x_i, y_i) = A \frac{e^{ikz}}{i\lambda z_i} \iint_{\Sigma} \psi_0(x_0, y_0) \exp\left(\frac{ik}{2z_i}[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]\right) dx_0 dy_0. \quad (15)$$

Volviendo a la ecuación (14), podemos calcular la intensidad en un punto de la pantalla como

$$I(Q) = \langle \psi(Q) \rangle^2 = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}I^{(2)}} \text{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\}, \quad (16)$$

donde

$$I^{(j)}(Q) \equiv |\hat{K}_j| |\langle \psi_j \rangle|^2 \quad (17)$$

y  $\gamma_{12}(\tau)$  viene definida por la ecuación (6).

Podemos escribir el grado de coherencia complejo como

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| \exp[i(\alpha_{12}(\tau) - 2\pi\bar{\nu}\tau)] \quad (18)$$

de forma que la ecuación (16) se puede reescribir como

$$I(Q) = \langle \psi(Q) \rangle^2 = I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}I^{(2)}} |\gamma_{12}(\tau)| \cos\left[\alpha_{12}(\tau) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right]. \quad (19)$$

De la ecuación (19) podemos despejar  $|\gamma_{12}(\tau)|$  y calcularlo a partir de medidas de intensidad en la pantalla con una, otra y ninguna rendija tapada, suponiendo que medimos un máximo.

Un sencillo cálculo nos permite obtener la visibilidad en este caso, que es

$$V \equiv \frac{V_{\max} + V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}} = \frac{2\sqrt{I^{(1)}I^{(2)}}}{I^{(1)} + I^{(2)}} \gamma_{12}(\tau), \quad (20)$$

y coincide con  $\gamma_{12}(\tau)$  si  $I^{(1)} = I^{(2)}$ .

El ÁREA DE COHERENCIA se define de forma análoga al tiempo de coherencia (7), pero ahora en el dominio espacial,

$$A_c = \iint_{-\infty}^{\infty} |\mu(\Delta x, \Delta y)|^2 d\Delta x d\Delta y, \quad (21)$$

donde  $\mu$  es la intensidad mutua normalizada (DEFINIR) (¿o grado de coherencia espectral?) y  $\Delta x \equiv x_2 - x_1$  y  $\Delta y \equiv y_2 - y_1$  son las distancias horizontales y verticales, respectivamente, entre dos puntos de la pantalla.

Si tanto la fuente como el plano del interferómetro son planos, se puede demostrar que el área de coherencia es

$$A_c = \frac{(\bar{\lambda}z)^2}{\Sigma}, \quad (22)$$

donde  $\Sigma$  es el área de la fuente,  $\bar{\lambda}$  su longitud de onda media y  $z$  la distancia entre el plano de la fuente y el del interferómetro.

El área de coherencia está relacionada con el ángulo sólido  $\Omega$  subtendido por la fuente desde su origen al plano del interferómetro de la forma (cf. ec. 22)

$$\Omega \equiv \frac{\Sigma}{z^2} = \frac{\bar{\lambda}^2}{A_c}. \quad (23)$$

¿Por qué usar una fuente cuasimonocromática hace que se desplacen las franjas de interferencia?

## Luz cuasimonocromática

Que una luz sea cuasimonocromática significa que es de banda estrecha,

$$\Delta\nu \ll \bar{\nu}, \quad (24)$$

y que la longitud de coherencia es mucho mayor que la diferencia de caminos desde la fuente hasta el punto de observación,

$$\frac{r_2 - r_1}{c} \ll \tau_c. \quad (25)$$

Esto nos permite obtener una expresión simplificada del grado de coherencia,

$$\gamma_{12}(\tau) = \mu_{12} e^{-i2\pi\bar{\nu}\tau}. \quad (26)$$

Este resultado, junto con la ecuación (19), determina una visibilidad constante para el caso de la fuente monocromática de valor

$$V = \frac{2\sqrt{I^{(1)}I^{(2)}}}{I^{(1)} + I^{(2)}} \mu_{12}. \quad (27)$$

## Pureza espectral

La PUREZA ESPECTRAL consiste en que el perfil espectral de las fuentes que generan la interferencia y el de la propia interferencia son iguales.

A partir de la ley general de interferencias espectral, suponiendo que las dos fuentes originales tienen el mismo perfil espectral y que la diferencia de caminos se puede escribir como

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_0 + \Delta\tau, \quad (28)$$

donde  $\Delta\tau$  es mucho más pequeño que  $1/\Delta\nu$ , deducimos que la condición para que haya pureza espectral es

$$\hat{\mu}_{12}(\nu)e^{-i2\pi\nu\tau_0} = \gamma_{12}(\tau_0)\hat{\mu}_{11}(\nu). \quad (29)$$

A simple vista esto puede parecer imposible en general, ya que el término izquierdo oscila (rápidamente) en  $\nu$  mientras que el derecho no. Sin embargo, si elegimos adecuadamente  $\tau_0$ , podemos conseguir que el término exponencial cancele (compense) la oscilación de  $\hat{\mu}_{12}(\nu)$ , de forma que se igualen los retrasos sufridos por la luz desde las fuentes a las rendijas.

Esta condición se puede obtener idealmente en un experimento con luz policromática.

## Propagación de la función de coherencia mutua y de la densidad espectral mutua

Se puede demostrar que la función de coherencia mutua cumple la ecuación de ondas,

$$\Delta_i \Gamma_{12} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma_{12}(\tau), \quad (30)$$

donde  $i = 1, 2$ .

Aplicando el teorema de Wiener–Khinchin (8) a la ecuación anterior, obtenemos un par de ecuaciones de Helmholtz para la densidad espectral mutua,

$$[\Delta_i + k^2]S_{12}(\nu) = 0, \quad \forall \nu, \quad (31)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$ .

## Teorema de Van Cittert–Zernike

Expresa la correlación entre dos puntos de una pantalla debida a una señal generada por una fuente incoherente, cuasi-monocromática y plana.

Partimos de que la función de intensidad mutua, en aproximación de ángulos pequeños, se propaga siguiendo la ecuación

$$J(r_1, r_2) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\Sigma_1} \int_{\Sigma_2} J(r'_1, r'_2) \frac{e^{i\bar{k}(R_2 - R_1)}}{R_1 R_2} d^2 r'_1 d^2 r'_2, \quad (32)$$

donde  $\Sigma_i$  es la superficie de la fuente,  $r_i$  los puntos de la pantalla,  $r'_i$  un vector que va recorriendo la fuente y  $R_i$  es la distancia de  $r'_i$  al punto  $r_i$  de la pantalla

Si suponemos que la fuente es totalmente incoherente,

$$J(r'_1, r'_2) = I(r'_1) \delta(r'_2 - r'_1). \quad (33)$$

La delta expresa la idea de que dos puntos cualesquiera de la fuente están totalmente descorrelacionados, lo que puede ser cierto si las dimensiones de la fuente son grandes comparadas con la longitud de onda de la señal.

Con esta fuente, la función de intensidad mutua toma la forma

$$J(r_1, r_2) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\Sigma} I(r') \frac{e^{i\bar{k}(R_{2s} - R_{1s})}}{R_{1s} R_{2s}} d^2 r', \quad (34)$$

donde  $R_{i,s}$  representa la distancia desde el punto  $r'$  de la fuente al punto  $r_i$  de la pantalla.

La intensidad mutua normalizada es el grado de coherencia compleja,

$$j(r_1, r_2) = \frac{\int_{\Sigma} I(r') \frac{e^{i\bar{k}(R_{2s} - R_{1s})}}{R_{1s} R_{2s}} d^2 r'_1}{\sqrt{\int_{\Sigma} \frac{I(r')}{R_{1s}} d^2 r' \int_{\Sigma} \frac{I(r')}{R_{2s}} d^2 r'}}. \quad (35)$$

En aproximación a campo lejano los puntos  $r_i$  están lejos de la fuente y, por lo tanto, llamando  $s_i$  a los vectores unitarios que van desde el origen a  $r_i$  podemos escribir

$$R_{i,s} \sim r_i - s_i \cdot r'. \quad (36)$$

Así, podemos desprejiciar el término  $s_i \cdot r'$  en los denominadores donde aparezca  $R_{i,s}$ , de forma que obtenemos un grado de coherencia compleja

$$j(r_1, r_2) = e^{i\bar{k}(r_2 - r_1)} \frac{\int_{\Sigma} I(r') e^{-i\bar{k}(s_2 - s_1) \cdot r'} d^2 r'_1}{\int_{\Sigma} I(r') d^2 r'}. \quad (37)$$

Esta última ecuación se conoce como el TEOREMA DE VAN CITTERT–ZERNIKE PARA CAMPO LEJANO.